BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013

УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БАРБАШИНА

С.Т.АЛИЕВА*, Ж.Б.АХМЕДОВА, К.Б.МАНСИМОВ***

Бакинский Государственный Университет

saadata@mail.ru

*****Институт Кибернетики НАН Азербайджана***

akja@rambler.ru

Изучается дискретный аналог задачи Коши для одного класса линейных неоднородных разностных уравнений представляющий собой дискретный аналог интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина. Получено представление решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: уравнение, разностный аналог, уравнения типа Барбашина, задача Коши, матрица Коши

В работах [1, 2] были введены и изучены различные свойства решений линейных интегро-дифференциальных уравнений впоследствии получившие название интегро-дифференциальные уравнения типа Барбашина (Относительно этих уравнений см. также [3, 4]).

В настоящей статье рассматривается дискретный аналог линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина. Получено представление решения рассматриваемой задачи при помощи аналога матрицы Коши. В дальнейшем полученное представление предполагается использовать при исследовании особых управлений в задачах оптимального управления, описываемые нелинейным разностным аналогом интегро-дифференциальные уравнения типа Барбашина.

Постановка задачи. В узлах сетки

$$D = \{(t,x):\ t = t_0, t_0+1, \dots, t_1;\ \ x = x_0,\ \ x_0+1, \dots, x_1\}$$

рассмотрим линейное неоднородное разностное уравнение

$$y(t+1,x) = A(t,x)y(t,x) + \sum_{s=x_0}^{x_1} K(t,x,s)z(t,s) + f(t,x), \qquad (2.1)$$

с начальным условием

$$y(t_0,x)=\varphi(x),\quad x=x_0,x_0+1,...,x_1. \tag{2.2}$$

Здесь $A(t,x)$, $K(t,x,s)$ – заданные $(n\times n)$ дискретные матричные функции, $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ – заданные n-мерные дискретные вектор-функции, t_0,t_1,x_0,x_1 – заданы, причем разности t_1-t_0, x_1-x_0 – есть натуральные числа, $y(t,x)$ – искомая n-мерная вектор-функция.

Заметим, что система уравнений (2.1) представляет собой разностный аналог интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина [1-3].

Найдем представление решения задачи (2.1)-(2.2).

Основной результат. Полагая по определению

$$g(t,x)=\sum_{s=x_0}^{x_1}K(t,x,s)y(t,s)+f(t,x) \tag{3.1}$$

задачу (2.1)-(2.2) формально можем записать в виде

$$y(t+1,x)=A(t,x)y(t,x)+g(t,x), \tag{3.2}$$

$$y(t_0,x)=\varphi(x). \tag{3.3}$$

Интерпретируя систему уравнений (3.2) как линейное неоднородное разностное уравнение относительно $y(t,x)$ по t, решение задачи (3.2)-(3.3) по формуле о представлении решении линейных неоднородных разностных уравнений (см., напр. [5. с. 50-51, 6. с. 12-15]) можно представить в виде

$$y(t,x)=F(t,t_0-1,x)\varphi(x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau,x)g(\tau,x). \tag{3.4}$$

Здесь $F(t,\tau,x)$ – $(n\times n)$ матричная функция (матрица Коши системы $y(t+1,x)=A(t,x)y(t,x)$) являющаяся решением задачи

$$F(t,\tau-1,x)=F(t,\tau,x)A(\tau,x), \tag{3.5}$$

$$F(t,t-1,x)=E \tag{3.6}$$

(E – $(n\times n)$-единичная матрица).

Используя вид (3.1) вектор-функции $g(t,x)$ из (3.4) будем иметь:

$$y(t,x)=F(t,t_0-1,x)\varphi(x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau,x)f(\tau,x)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1}F(t,\tau,x)K(\tau,x,s)y(\tau,s)\right]. \tag{3.7}$$

Полагая

$$l(t,x)=F(t,t_0-1,x)\varphi(x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau,x)f(\tau,x),$$

$$Q(t,x,\tau,s)=F(t,\tau,x)K(\tau,x,s)$$

представление (3.7) записывается в виде

$$y(t,x)=l(t,x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}Q(t,x;\tau,s)y(\tau,s). \tag{3.8}$$

Система уравнений (3.8) является линейной неоднородной системой разностных уравнений типа Вольтерра – Фредгольма.

Таким образом, доказали, что решение задачи Коши (2.1)-(2.2) является решением неоднородного разностного уравнения (3.8) типа Вольтерра – Фредгольма. Поэтому, следует найти представление решения системы уравнений (3.8).

Имеет место

Теорема 3.1. Решение $y(t,x)$ уравнения (3.8) допускает представление в виде:

$$y(t,x)=l(t,x)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}R(t,x;\tau,s)l(\tau,s). \tag{3.9}$$

Здесь $R(t,x;\tau,s)$ $(n\times n)$ – матричная функция (резольвента матрицы $Q(t,x,\tau,s)$) являющаяся решением матричного разностного уравнения

$$R(t,x;\tau,s)=\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}Q(t,x;\alpha,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)-Q(t,x,\tau,s). \tag{3.10}$$

Доказательство. Покажем, что представление (3.9) удовлетворяет уравнению (3.8).

Подставляя выражение (3.9) $y(t,x)$ в (3.8) получим:

$$l(t,x)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}R(t,x;\tau,s)l(\tau,s)=l(t,x)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}Q(t,x;\tau,s)\left[l(\tau,s)-\sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}R(\tau,s,\alpha,\beta)l(\alpha,\beta)\right]=$$

$$=l(t,x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}Q(t,x;\tau,s)l(\tau,s)-$$

$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}Q(t,x;\tau,s)\left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}R(\tau,s,\alpha,\beta)l(\alpha,\beta)\right]=$$

$$=l(t,x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}Q(t,x;\tau,s)l(\tau,s)-$$

$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}Q(t,x;\alpha,s)R(\alpha,s;\tau,\beta)f(\tau,\beta)\right]=$$

$$= l(t,x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1} Q(t,x;\tau,s) l(\tau,s) -$$

$$- \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}\left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1} Q(t,x;\alpha,\beta) R(\alpha,\beta;\tau,s) f(\tau,s)\right] =$$

$$= l(t,x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1} Q(t,x;\tau,s) l(\tau,s) -$$

$$- \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1} Q(t,x;\alpha,\beta) R(\alpha,\beta;\tau,s) f(\tau,s)\right] =$$

$$= l(t,x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1} \Big[Q(t,x;\tau,s) -$$

$$\left.\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1} Q(t,x;\alpha,\beta) R(\alpha,\beta;\tau,s)\right] l(\tau,s).$$

Таким образом, мы получим, что

$$l(t,x) - \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1} R(t,x;\tau,s) l(\tau,s) = l(t,x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\Big[Q(t,x;\tau,s) -$$

$$\left.\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1} Q(t,x;\alpha,\beta) R(\alpha,\beta;\tau,s)\right] l(\tau,s).$$

Отсюда получаем, что если матричная функция $R(t,x;\tau,s)$ удовлетворяет уравнению (3.10), то $y(t,x)$, определяемая формулой (3.9), является решением уравнения (3.8), следовательно, а также задачи (2.1)-(2.2). Теорема доказана.

Теперь получим разностное уравнение для матричной функции $R(t,x;\tau,s)$. С учетом выражения для $Q(t,x;\tau,s)$, уравнение (3.10) записывается в виде

$$R(t,x;\tau,s) = \sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1} F(t,\alpha,x) K(\alpha,x,\beta) R(\alpha,\beta;\tau,s) - \\ - F(t,\tau,x) K(\tau,x,s). \tag{3.11}$$

Отсюда получаем, что

$$R(t+1,x;\tau,s)=\sum_{\alpha=\tau+1}^{t}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}F(t+1,\alpha,x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)-$$

$$-F(t+1,\tau,x)K(\tau,x,s)=\sum_{\beta=x_0}^{x_1}F(t+1,t,x)K(t,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s)+ \qquad (3.12)$$

$$+\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}F(t,\alpha,x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,s)-F(t+1,\tau,x)K(\tau,x,s).$$

Известно (см. напр. [6, с. 12-15]), что матричная функция $F(t,\tau,x)$ по аргументу t является решением задачи

$$F(t+1,\tau,x)=A(t,x)F(t,\tau,x),$$
$$F(t+1,t,x)=E. \qquad (3.13)$$

С учетом (3.13) из (3.12) будем иметь

$$R(t+1,x;\tau,s)=\sum_{\beta=x_0}^{x_1}A(t,x)F(t,\alpha,x)K(\alpha,x,\beta)R(\alpha,\beta;\tau,\beta)-$$

$$-A(t,x)F(t,\tau,x)K(\tau,x,s)+\sum_{\beta=x_0}^{x_1}K(t,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s).$$

Следовательно,

$$R(t+1,x;\tau,s)=A(t,x)R(t,x;\tau,s)+\sum_{\beta=x_0}^{x_1}K(t,x,\beta)R(t,\beta;\tau,s).$$

Далее из (3.11) следует, что

$$R(t+1,x;t,s)=-K(t,x,s).$$

Используя теорему 3.1, доказывается

Теорема 3.2. Решение задачи (2.1)-(2.2) допускает представление в виде:

$$y(t,x)=F(t,t_0-1,x)\varphi(x)-$$

$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}R(t,x;\tau,s)F(\tau,t_0-1,s)\varphi(s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau,x)f(\tau,x)-$$

$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\left[\sum_{\alpha=\tau+1}^{t-1}R(t,x;\alpha,s)F(\alpha,\tau,s)\right]f(\tau,s). \qquad (3.14)$$

Заключение. В работе рассматривается аналог задачи Коши для дискретного аналога интегро-дифференциального уравнения типа Барбашина. Введен аналог матрицы Коши и с его помощью получено представление решения рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабашин Е.А. Об условиях сохранения свойства устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Изв. Вузов, сер. Матем., 1957, № 2, с. 25-34.
2. Барабашин Е.А., Бисярина Л.П. Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Изв. Вузов, сер. Матем., 1963, № 2, с. 3-14.
3. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М.: МГУ, 1989, .
4. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б., Исмайлов И.Р. О представлении решений одного класса систем интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина // «Научные известия» Сумгаитского Государственного Университета, т.7, №1 2007, с.30-34.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем // Минск: БГУ, 1973, с.
6. Мансимов К.Б. Дискретные системы // Баку: БГУ, 2002, 114 с.

BARBAŞİN TİPLİ BİR SİNİF XƏTTİ BİRCİNS OLMAYAN FƏRQ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

S.T.ƏLİYEVA, J.B.ƏHMƏDOVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif Barbaşin tipli xətti bircins olmayan inteqro-diferensial tənliklər sisteminin fərq analoqu üçün qoyulmuş Koşi məsələsinə baxılır. Həllin göstərilişi tapılır.

Açar sözlər: tənlik, fərq analoqu, Barbaşin tipli tənlik, Koşi məsələsi, Koşi matrisi

THE REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF BARBASHIN TYPE ONE CLASS LINEAR NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTİAL EQUATION

S.T.ALIYEVA, Zh.B.AHMADOVA, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

The article studies the Cauchi problem for differential analogue of one class Barbashin type linear non-homogeneous integro-differential system of equations. The representation of the solution is found.

Key words: equation, difference analogue, Barbashin type equation, Cauchi problems, matrix Cauchi

Поступила в редакцию: 29.03.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.